可積分系とrandom permutationsについて (離散可積分系の研究の進展 : 超離散化・量子化)

塩田, 隆比呂(述); 筧, 三郎(記)

数理解析研究所講究録 1221 巻 2001 年 195-198

可積分系と random permutations について

京都大学理学部　塩田 隆比呂　述
早稲田大学理工学部　筧　三郎*　記

ランダム行列と可積分系との関係については，これまでに多くの研究が成されてきた。一例としては Tracy-Widom の仕事 ([TW1] 参照) を挙げることができる。彼らの仕事では，ランダム行列の固有値分布に関連して，パンルベ方程式 (の特別な場合) が現れてくる。

論文 [TW2] において Tracy と Widom は，エルミート行列集団での edge scaling limit を調べた。ここで，エルミート行列集団 (Hermitian matrix ensemble) とは，$N\times N$ のエルミート行列

$$H=(h_{ij})_{\leq i,j\leq N},\qquad h_{ij}=\overline{h_{ji}}$$

において，各 h_{ij} の実部と虚部が互いに独立な正規分布 (平均値 0，分散 1/2 とする) に従うとするものである。上の H の固有値を

$$E_1\geq E_2\geq E_3\geq\cdots$$

とするとき，

$$(E_i-\sqrt{2N})/\sqrt{2}N^{1/6},\qquad i=1,2,\ldots \tag{1}$$

という量を考えてみる。Tracy と Widom が示したのは，最大固有値に対応する確率変数 $(E_1-\sqrt{2N})/\sqrt{2}N^{1/6}$ の分布の様子が，パンルベ II 型方程式 (の特別な場合)

$$u_{xx}=2u^3+xu \tag{2}$$

によって記述されるということである [TW2]。

方程式 (2) の解のうち，漸近挙動

$$u(x)\sim-\mathrm{Ai}(x)\quad\text{as}\quad x\to+\infty$$

($\mathrm{Ai}(x)$ は Airy 関数) で特徴付けられるものを考えよう。この $u(x)$ を用いて，

$$F(t)\stackrel{\text{def}}{=}\exp\left(-\int_t^{\infty}(x-t)u(x)^2\mathrm{d}x\right) \tag{3}$$

と定める。

Theorem 1 ([TW2])

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{Prob}\left(\frac{E_1-\sqrt{2N}}{\sqrt{2}N^{1/6}}\leq t\right)=F(t) \tag{4}$$

*2001 年 4 月より，立教大学理学部数学科

(このことから，[BDJ1] では(3) を “Tracy-Widom distribution” と呼んでいる。)

以下では，“random permutations” と可積分系との関係に関する仕事[BDJ1, BDJ2, O1, O2] を紹介する。まず，以下で用いる記号を準備しておく。

- S_N : $\{1,2,\ldots,N\}$ の置換の全体
- $\ell_N(\pi)$: length of longest increasing subsequence of $\pi \in S_N$,

$$\ell_N(\pi) \overset{\text{def}}{=} \max\{\, k \mid {}^{\exists}(i_1,\ldots,i_N) \ \text{s.t.}\ 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le N,\ \pi(i_1) < \cdots < \pi(i_k)\}$$

- $\ell_N^{(k)}(\pi)$: length of longest k-increasing subsequence of $\pi \in S_N$,

$$\ell_N^{(k)}(\pi) \overset{\text{def}}{=} \max\{\ \text{ちょうど}\ k\ \text{個の disjoint increasing subsequence (“empty” を許す) の長さ}\ \}$$

さて，S_N に一様測度 $p(\pi) = 1/N!$ (${}^{\forall}\pi \in S_N$) を導入する。このとき，期待値 $E(\ell_N)$ が $N \to \infty$ でどのように振舞うかという問題は「Ulam の問題」[U] と呼ばれている。実は今の場合，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E(\ell_N)}{\sqrt{N}} = 2$$

となり，期待値 $E(\ell_N)$ は $O(N^{1/2})$ で発散することが知られている。次に問題となるのは期待値の周りの揺らぎの様子であるが，ランダム行列の場合と同様に，パンルベ方程式の解を用いて表されるのである。

Theorem 2 ([BDJ1])

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Prob}\left(\frac{\ell_N - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}} \le t\right) = F(t) \tag{5}$$

この結果はランダム行列における最大固有値の分布と，random permutations における longest increasing subsequence とを関係付けるものであるが，他の固有値の場合にも類似の結果がある [BDJ2, O1]。そのための準備として，上で導入した S_N に対する一様測度を，Robinson-Schensted 対応によってヤング図形の集合上の測度に読みかえる。このとき，上で導入した $\ell_N^{(k)}(\pi)$ は π に対応する分割 $\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots)$ を用いて

$$\ell_N^{(k)}(\pi) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$$

と表される。この λ_i の分布と，固有値 E_i の分布が次のように対応するのである。

Theorem 3 ([O1]) 確率変数 x_i, y_i $(i = 1,2,\ldots)$ を次で定義する:

$$x_i \overset{\text{def}}{=} N^{1/3}\left(\frac{\lambda_i}{2N^{1/2}} - 1\right), \qquad y_i \overset{\text{def}}{=} N^{2/3}\left(\frac{E_i}{2N^{1/2}} - 1\right).$$

この x_i, y_i のラプラス変換

$$\widehat{x}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(\xi x_i), \quad \widehat{y}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(\xi y_i), \quad \xi > 0,$$

を考えると，$N \to \infty$ の極限で $\widehat{x}(\xi)$ の混合モーメントが存在し，かつ $\widehat{y}(\xi)$ のものと一致する:

$$\lim_{n\to\infty} \langle \widehat{x}(\xi_1) \ldots \widehat{x}(\xi_s) \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \widehat{y}(\xi_1) \ldots \widehat{y}(\xi_s) \rangle \quad (s = 1, 2, \ldots, \ \xi_1, \ldots, \xi_s > 0).$$

Theorem 2, 3 ではエルミート行列集団を考えているが，考える行列集団を直交行列，シンプレクティック行列のものにしても，類似の結果が得られることが知られている [BR1, BR2, BR3]。その場合には，ある種の対称性を持った S_N の部分集合を考えることになる。

さて，Theorem 2, 3 で考えた分割 λ に対する測度は，次のように表すこともできる:

$$\mathfrak{P}_N(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{N!}, \quad |\lambda| = N. \tag{6}$$

ここで，$\dim \lambda$ は分割 λ でラベルされる S_N の既約表現の次元である。この測度の拡張として，次の "Schur measure" を導入する [O2]:

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \frac{1}{Z} s_\lambda(x) s_\lambda(y), \quad Z = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}. \tag{7}$$

ここで $s_\lambda(x)$ は Schur 多項式であり，規格化因子 Z は Cauchy identity

$$\sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$$

より決めている。

Schur measure (7) では変数 $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ を用いているが，ベキ和の変数 (ソリトン理論における言葉では "三輪変数")

$$t_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k} \sum_i x_i^k, \qquad t'_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k} \sum_i y_i^k,$$

を用いて $t = t' = (\sqrt{\xi}, 0, 0, \ldots)$ とすると，

$$\mathfrak{M}(\lambda)|_{t=t'=(\sqrt{\xi},0,0,\ldots)} = \mathrm{e}^{-\xi} \xi^{|\lambda|} \left(\frac{\dim \lambda}{|\lambda|!} \right)^2$$

となり，先程の $\mathfrak{P}(\lambda)$ を "Poisson 化" したものが得られる。

次に，分割 λ に対して $\mathbb{Z} + 1/2$ の部分集合 $\mathfrak{S}(\lambda)$ を次のように定める:

$$\mathfrak{S}(\lambda) = \{\lambda_i - i + 1/2\} \subset \mathbb{Z} + 1/2.$$

この対応は，佐藤理論におけるヤング図形とマヤ図形との対応と同じであることを注意しておく。このとき，$\mathbb{Z} + 1/2$ の有限部分集合 X に対する "相関関数" $\rho(X)$ を次式で定める:

$$\rho(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{M}(\{\lambda \mid X \subset \mathfrak{S}(\lambda)\}) = \frac{1}{Z} \sum_{\mathfrak{S}(\lambda) \supset X} s_\lambda(x) s_\lambda(y). \tag{8}$$

この $\rho(X)$ が，次の意味で "τ-関数" になるのである。

Theorem 4 (**[O2]**)

$$\tau_n(t,t') = \rho(X-n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

は，*2*次元戸田格子ヒエラルキー *[UT]*の τ-関数となる。すなわち，*[UT]*の *(1.3.26)* 式を満たす。

論文 [O2] では，さらに n 点関数の満たす q-差分方程式についても議論している。詳しくは論文 [O2] を参照していただきたい。

参考文献

[BDJ1] J. Baik, P. Deift and K. Johansson, "On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations", *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), no. 4, 1119-1178.

[BDJ2] J. Baik, P. Deift and K. Johansson, "On the distribution of the length of the second row of a Young diagram under Plancherel measure", *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), no. 4, 702-731; Addendum, *ibid.* **10** (2000), no. 6, 1606-1607.

[BR1] J. Baik, E.M. Rains, "Algebraic aspects of increasing subsequences", *preprint* (math.CO/9905083).

[BR2] J. Baik, E.M. Rains, "The asymptotics of monotone subsequences of involutions", *preprint* (math.CO/9905084).

[BR3] J. Baik, E.M. Rains, "Symmetrized random permutations", *preprint* (math.CO/9910019).

[O1] A. Okounkov, "Random matrices and random permutations", *Internat. Math. Res. Notices* (2000), no. 20, 1043-1095.

[O2] A. Okounkov, "Infinite wedge and random partitions", *preprint* (math.RT/9907127).

[TW1] C.A. Tracy and H. Widom, "Introduction to random matrices", *Springer Lecture Notes in Physics* **424** (1993) 103-130.

[TW2] C.A. Tracy and H. Widom "Level-spacing distributions and the Airy kernel", *Phys. Lett.* **B305** (1993) 115-118.

[UT] K. Ueno and K. Takasaki, "Toda lattice hierarchy", in *Advanced Studies in Pure Mathematics* **4**, 1-95, World Scientific, 1984.

[U] S.M. Ulam, "Monte Carlo calculations in problems of mathematical physics", in *Modern Mathematics for the Engineers*, E.F. Beckenbach, ed., McGraw-Hill (1961) 261-281.